

---

---

## Segunda Lista de Teoria Eletromagnética I

---

---

1 - Considere uma carga pontual  $q$ , situada à distância  $a$  do centro de uma esfera condutora aterrada ( $V = 0$ ) de raio  $R$  ( $R < a$ ), conforme mostrado na figura 1.

- (a) Use o método das imagens para determinar o potencial fora da esfera.
- (b) Determine o vetor força elétrica sobre a carga pontual  $q$ .
- (c) Encontre a densidade superficial de carga induzida sobre a esfera em função do ângulo polar  $\theta$  das coordenadas esféricas. Qual a carga total induzida?
- (d) Determine a energia eletrostática da configuração.
- (e) Considere agora uma esfera *neutra* em um potencial arbitrário  $V_0$  (relativo ao infinito). Novamente, usando o método das imagens, determine o vetor força sobre a carga pontual  $q$ . **Dica:** Podemos resolver esse problema acrescentando uma segunda carga imagem para produzir potencial  $V_0$  na superfície da esfera. Que carga devemos usar e onde ela deve ser colocada?

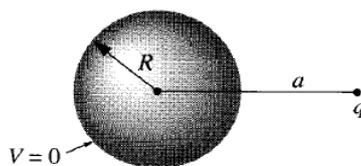


Figura 1: Problema 1

2 - Dois planos condutores aterrados e semi-infinitos encontram-se em ângulos retos. Na região entre eles há uma carga pontual  $q$ , conforme exibido na figura 2.

- (a) Monte a configuração de cargas imagens e calcule o potencial nessa região. De que cargas imagens você precisa e onde elas devem estar localizadas?
- (b) Qual é o vetor força sobre  $q$ ?
- (c) Determine a energia eletrostática do sistema.
- (d) Suponha que os planos se encontrem em um ângulo diferente de  $90^\circ$ . Para que ângulos o método das imagens funciona? Forneça a localização das cargas imagens para o caso de  $45^\circ$ .

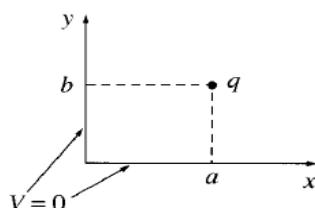


Figura 2: Problema 2

**3** - Um tubo retangular disposto paralelamente ao eixo  $z$  (de  $-\infty$  a  $+\infty$ ), tem três de seus lados de metal aterrados, em  $y = 0$ ,  $y = a$  e  $x = 0$ . O quarto lado, em  $x = b$ , é mantido constante em um potencial específico  $V_0(y)$ , conforme ilustrado na figura 3.

(a) Desenvolva uma expressão para o potencial no interior do tubo em termos de  $V_0(y)$ .

(b) Encontre o potencial explicitamente para o caso  $V_0(y) = V_0$  (constante).

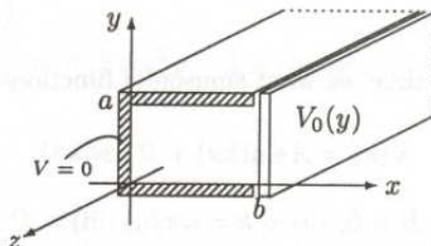


Figura 3: Problema 3

**4** - Uma caixa cúbica (com lados de comprimento  $a$ ) consiste de cinco placas de metal que estão soldadas juntas e aterradas (figura 4). O topo é feito de uma folha de metal separada, isolada das outras e mantida a um potencial constante  $V_0$ . Encontre o potencial dentro da caixa.

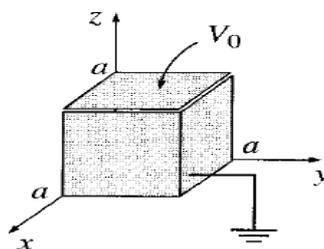


Figura 4: Problema 4

**5** - O potencial na superfície de uma esfera de raio  $R$  é dado por

$$V_0 = k \cos 3\theta,$$

onde  $k$  é uma constante. Assuma que não há carga dentro ou fora da esfera.

(a) Encontre o potencial dentro e fora da esfera.

(b) Encontre a densidade superficial de carga  $\sigma(\theta)$  na esfera.

**6** - Considere um tubo cilíndrico de metal infinitamente longo, de raio  $R$ , colocado em ângulos retos em um campo elétrico  $\mathbf{E}_0$ , que é originalmente uniforme. Usando a solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, determine:

(a) o potencial fora do tubo.

(b) a carga superficial induzida no tubo.

7 - A densidade de carga

$$\sigma(\theta) = a \sin 5\phi,$$

onde  $a$  é uma constante, está colocada sobre a superfície de um cilindro infinito de raio  $R$  (figura 5). A partir da solução geral da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, encontre o potencial dentro e fora do cilindro.

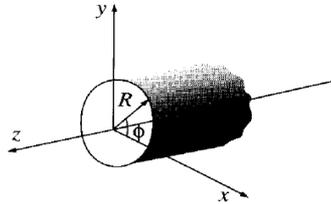


Figura 5: Problema 7

8 - Quatro partículas (uma de carga  $q$ , uma de carga  $3q$  e duas de carga  $-2q$ ) estão dispostas como mostra a figura 6, cada uma delas a uma distância  $a$  da origem. Usando a expansão de multipolos, encontre uma expressão simples aproximada para o potencial, válida em pontos distantes da origem (calcule a expansão de multipolos até a sua primeira contribuição não-nula). Expresse sua resposta em coordenadas esféricas.

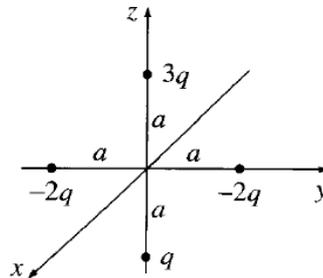


Figura 6: Problema 8

9 - Para uma casca esférica de raio  $R$ , cuja densidade superficial de carga é dada por  $\sigma = k \cos \theta$ , o potencial exato é

$$V(r, \theta) = \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (r \leq R) \quad \text{e} \quad V(r, \theta) = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq R).$$

Considerando a expansão de multipolos:

(a) calcule o momento de dipolo dessa distribuição de carga.

(b) encontre o potencial aproximado (até a primeira contribuição não-nula na expansão de multipolos), para pontos distantes da esfera, e compare com a resposta exata dada acima. O que você pode concluir a respeito dos multipolos mais altos?

**10** - Seja um dipolo elétrico (físico), dado por duas cargas iguais e opostas ( $\pm q$ ), separadas por uma distância  $d$ . Considere como  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|$  a distância até um ponto  $\mathbf{r}$  a partir da carga  $-q$  e  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|$  a distância a partir da carga  $+q$ . Expanda  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\pm|$  até a ordem  $(d/r)^3$  e use isso para determinar os termos quadrupolar e octopolar do potencial.

**11** - Duas cargas pontuais,  $3q$  e  $-q$  estão separadas por uma distância  $a$ . Para cada um dos arranjos da figura 7, encontre (i) o momento de monopolo, (ii) o momento de dipolo e (iii) o potencial aproximado (em coordenadas esféricas) em  $r$  grande (inclua tanto a contribuição monopolar quanto a dipolar).

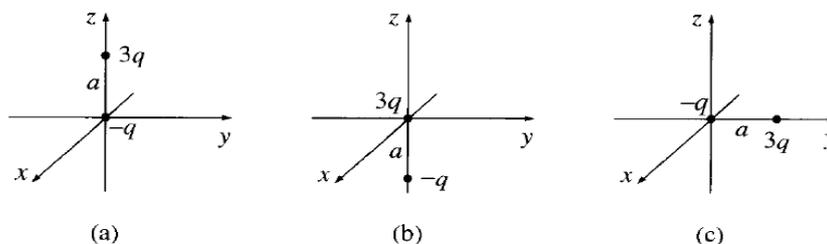


Figura 7: Problema 11

**12** - Um dipolo elétrico puro  $p$  está localizado na origem, apontando na direção  $z$ .

- (a) Qual é a força sobre uma carga pontual  $q$  em  $(a, 0, 0)$  (em coordenadas cartesianas)?
- (b) Qual é a força sobre  $q$  em  $(0, 0, a)$ ?
- (c) Quanto trabalho é necessário para movimentar  $q$  de  $(a, 0, 0)$  a  $(0, 0, a)$ ?

**13** - Três cargas pontuais estão localizadas cada uma a uma distância  $a$  da origem, como mostra a figura 8. Encontre o campo elétrico aproximado em pontos distantes da origem. Expresse a sua resposta em coordenadas esféricas e inclua as duas ordens mais baixas na expansão multipolar.

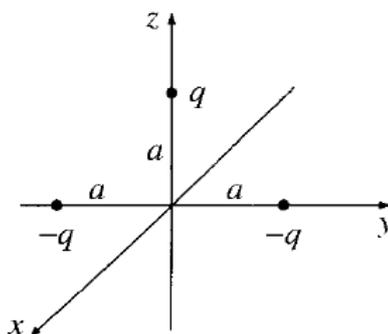


Figura 8: Problema 13

**14** - Mostre que o campo elétrico de um dipolo puro, o qual é dado em coordenadas esféricas por

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}),$$

pode ser escrito na forma livre de coordenadas como

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}].$$

15 - (a) Mostre que o termo quadrupolar na expansão multipolar pode ser escrito como

$$V_{\text{quad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij} ,$$

onde

$$Q_{ij} \equiv \int \left[ 3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij} \right] \rho(\mathbf{r}') d\tau' .$$

Aqui

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é o **delta de Kronecker**, e  $Q_{ij}$  é o **momento de quadrupolo** da distribuição de carga. Observe a hierarquia:

$$V_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}; \quad V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \hat{r}_i p_i}{r^2}; \quad V_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{2} \sum \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij}}{r^3}; \dots$$

O momento do monopolo ( $Q$ ) é um escalar, o momento de dipolo ( $\mathbf{p}$ ) é um vetor, o momento de quadrupolo ( $Q_{ij}$ ) é um tensor de segunda ordem, e assim sucessivamente.

(b) Encontre todos os nove componentes de  $Q_{ij}$  para a configuração da figura 9 (assuma que o quadrado tem o lado  $a$  e está no plano  $xy$ , centrado na origem).

(c) Mostre que o momento de quadrupolo é independente da origem se os momentos de monopolo e de dipolo se anularem (isso funciona para toda a hierarquia - o momento multipolar mais baixo não nulo é sempre independente da origem).

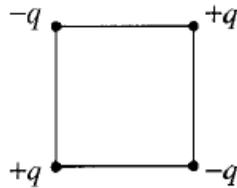


Figura 9: Problema 15

16 - Considere um condutor esférico descarregado de raio  $R$  colocado em um campo externo  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{z}$  inicialmente uniforme. Usando o *método das imagens*, verifique que o potencial fora do condutor é dado por

$$V(r, \theta) = -E_0 \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta .$$

**Dica:** Use o problema clássico da carga imagem para a esfera (ver Problema 1), mas acrescente outra carga,  $-q$ , diametralmente oposta a  $q$ . Considere  $a \rightarrow \infty$ , com  $(1/4\pi\epsilon_0) (2q/a^2) = E_0$  mantido constante.

17 - Uma esfera de raio  $R$  tem uma polarização

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = k\mathbf{r} ,$$

onde  $k$  é uma constante e  $\mathbf{r}$  é o vetor a partir do centro.

- (a) Calcule as cargas de polarização  $\sigma_p$  e  $\rho_p$ .  
 (b) Encontre o campo dentro e fora da esfera.

18 - Um cilindro muito longo, de raio  $a$ , tem uma polarização uniforme  $\mathbf{P}$  perpendicular ao seu eixo. Encontre o campo elétrico dentro do cilindro. Mostre que o campo *fora* do cilindro pode ser expresso na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{a^2}{2\epsilon_0 s^2} [2(\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{s}})\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{P}] .$$

(Cuidado: o enunciado diz 'uniforme', e não 'radial'.)

19 - Uma casca esférica grossa (raio interno  $a$ , raio externo  $b$ ) é feita de material dielétrico, com polarização 'congelada'

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r} \hat{\mathbf{r}} ,$$

onde  $k$  é uma constante e  $r$  é a distância a partir do centro (figura 10). (Não existe carga livre no problema.) Encontre o campo elétrico em todo o espaço por dois métodos diferentes:

- (a) Localize toda a carga de polarização e use a Lei de Gauss para calcular o campo que ela produz.  
 (b) Use a expressão da Lei de Gauss na presença de dielétricos para encontrar  $\mathbf{D}$ , e depois obtenha  $\mathbf{E}$  com a equação  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ . [Observe que o segundo método é muito mais rápido e evita qualquer referência explícita às cargas de polarização.]

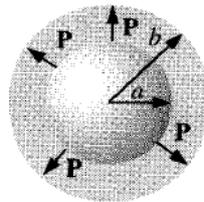


Figura 10: Problema 19

20 - O espaço entre as placas de um capacitor de placas paralelas (figura 11) é preenchido com duas chapas de material dielétrico linear. Cada chapa tem espessura  $a$ , de forma que a distância total entre as placas é  $2a$ . A chapa 1 tem uma constante dielétrica 2, e a chapa 2 tem constante dielétrica 1,5. A densidade de carga livre na placa superior é  $\sigma$  e na placa inferior é  $-\sigma$ .

- (a) Encontre o deslocamento dielétrico  $\mathbf{D}$  em cada chapa.  
 (b) Encontre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  em cada chapa.  
 (c) Encontre a polarização  $\mathbf{P}$  em cada chapa.

- (d) Encontre a diferença de potencial entre as placas.
- (e) Encontre a localização e a quantidade de toda a carga de polarização.
- (f) Agora que você conhece toda a carga (livre e de polarização), recalcule o campo em cada chapa e confirme a sua resposta para (b).

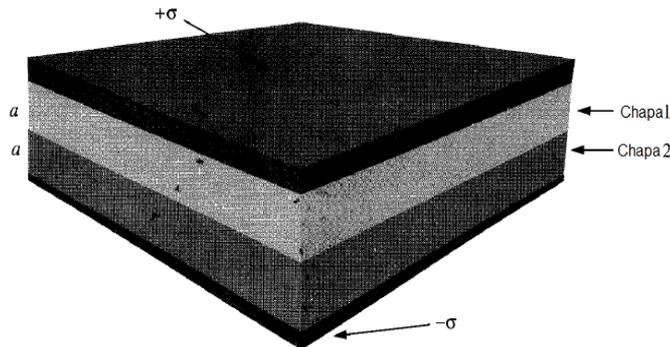


Figura 11: Problema 20

- 21** - Um certo cabo coaxial de fio de cobre de raio  $a$ , cercado por um tubo concêntrico de cobre de raio interno  $c$  (figura 12). O espaço intermediário está parcialmente preenchido (entre  $b$  e  $c$ ) com material de constante dielétrica  $\epsilon_r$ , conforme mostrado. Encontre a capacitância por unidade de comprimento desse cabo.

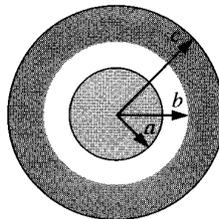


Figura 12: Problema 20

- 22** - Um cilindro muito longo de material dielétrico linear é colocado em um campo elétrico  $\mathbf{E}_0$  que inicialmente é uniforme. Encontre o campo resultante dentro do cilindro. (O raio é  $a$ , a suscetibilidade é  $\chi_e$  e o eixo é perpendicular a  $\mathbf{E}_0$ .)

- 23** - Uma esfera condutora sem carga, de raio  $a$ , é revestida com uma casca isolante espessa (constante dielétrica  $\epsilon_r$ ) até um raio  $b$ . Este objeto é agora colocado em um campo elétrico  $\mathbf{E}_0$ , que inicialmente é uniforme. Encontre o campo elétrico no isolante.

- 24** - Um dipolo elétrico com momento de dipolo  $\vec{p} = p\hat{z}$  está orientado perpendicularmente a um plano condutor infinito aterrado (isto é, mantido em potencial elétrico  $V = 0$ ). O dipolo

está na posição  $(0, 0, d)$ , com  $d > 0$ , podendo ser aproximado como um dipolo puro. O plano se encontra na posição  $z = 0$ , coincidindo com o plano  $xy$ .

(a) Determine o potencial  $V(x, y, z)$  em toda a região  $z \geq 0$  pelo método das imagens, verificando que o problema-imagem satisfaz as condições de contorno do problema original. Expresse  $V(x, y, z)$  em termos de  $p$ ,  $d$  e das coordenadas  $(x, y, z)$ .

(b) Calcule a densidade superficial de carga induzida no plano condutor.

(c) Calcule a carga total induzida no plano condutor.

(d) Calcule a força que o plano condutor faz sobre o dipolo. **Dica:** a força sobre um dipolo em um campo não-uniforme pode ser calculada através da expressão  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ , onde  $\vec{E}$  é o campo sobre o dipolo.

**25** - Considere uma distribuição de carga cujo potencial eletrostático, dado em coordenadas esféricas, depende exclusivamente da variável  $\theta$  [ou seja,  $V = V(\theta)$ ], onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o semi-eixo positivo  $Z$  e o vetor posição  $\vec{r}$ . Determine a solução geral da equação de Laplace para  $V(\theta)$ , identificando em particular as constantes a serem fixadas pelas condições de contorno.

**26** - Considere uma configuração composta de 3 cargas pontuais formando um triângulo equilátero de lado  $L$ , conforme a figura 13. A carga no topo do triângulo é  $2q$  enquanto as cargas na base do triângulo são ambas  $-q$ .

(a) Calcule o momento de monopolo da configuração.

(b) Calcule o momento de dipolo da configuração. Use explicitamente o sistema de referência mostrado na figura.

(c) Determine o momento de dipolo se trasladarmos a origem do sistema de referência para uma posição  $\vec{a}$  arbitrária do plano  $xy$ .

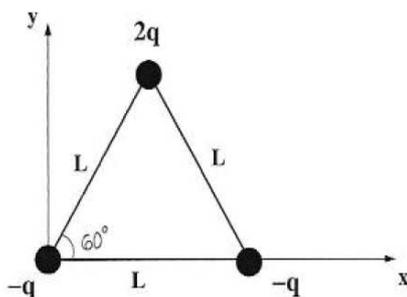


Figura 13: Problema 26